Wstęp do Teorii Oddziaływań Fundamentalnych

Igor Nowicki

12 czerwca 2014

Spis treści

1 Wstęp do Teorii Oddziaływań Fundamentalnych 3
1.1 Zasada najmniejszego działania i równania ruchu w klasycznej teorii pola 3
1.2 Równania ruchu w teorii rzeczywistego pola skalarnego 3
1.3 Równania ruchu w teorii zespolonego pola skalarnego z globalną symetrią U(1) i bez niej 4
1.4 Twierdzenie Noether dla symetrii wewnętrznych 4
1.5 Symetria translacyjna, twierdzenie Noether i 4-wektor pędu w teorii pola 5
1.6 Kowariantne sformułowanie elektrodynamiki klasycznej 5
1.7 Tensor energii-pędu dla elektrodynamiki klasycznej 5
1.8 Konstrukcja elektrodynamiki skalarnej, zachowany prąd Noether 5
1.9 Konstrukcja teorii pola z nieabelową symetrią cechowania, pochodna kowariantna 6
1.10 Równanie Diraca, oddziaływanie z polami cechowania 6
1.11 Model Goldstona i spontaniczne naruszenie globalnej symetrii 7
1.12 Mechanizm Higgsa dla symetrii U(1) 7
1.13 Kwantowanie swobodnego rzeczywistego pola skalarnego 8
1.14 Operator energii i pędu w teorii rzeczywistego pola skalarnego, uporządkowanie normalne 8
1.15 Kwantowanie swobodnego zespolonego pola skalarnego 9
1.16 Operator energii i pędu w teorii zespolonego pola skalarnego 9
1.17 Operator ładunku U(1) w teorii zespolonego pola skalarnego 9
1.18 Propagator Feynmana w teorii rzeczywistego pola skalarnego, reprezentacja pędowa 10
1.19 Propagator Feynmana w teorii zespolonego pola skalarnego, reprezentacja pędowa 11
1.20 Kwantowanie swobodnego pola fermionowego 11
1.21 Hamiltonian w teorii swobodnego pola fermionowego 11
1.22 Kwantowanie swobodnego pola elektromagnetycznego w cechowaniu kowariantnym, fizyczne stopnie swobody 11
1.23 Hamiltonian i operator pędu w teorii swobodnego pola elektromagnetycznego 11

1.24 Obraz oddziaływania, operator ewolucji i perturbacyjne rozwiązanie równania ruchu dla operatora ewolucji . . . 12
1.25 Twierdzenie Wicka . . . 12
1.26 Propagator Feynmana dla pola fermionowego . . . 12
1.27 Propagator Feynmana dla pola cechowania o symetrii U(1) . . . 13
1.28 Przekrój czynny i szerokość rozpadu . . . 13
1.29 Dwu-cząstkowa przestrzeń fazowa i przekrój czynny dla procesów $2 \to 2$. 14
1.30 Rozpraszanie Comptona w elektrodynamice kwantowej . . . 14
1.31 Reguły Feynmana w przestrzeni położeń dla elektrodynamiki kwantowej . 14
1.32 Reguły Feynmana w przestrzeni pędów dla elektrodynamiki kwantowej . . 14
1.33 Przekrój czynny na rozpraszanie w QED . . . 14
1.34 Sektor leptonowy w Modelu Standardowym, prądy naładowane i neutralne 14
1.35 Sektor kwarkowy w Modelu Standardowym, prądy naładowane i neutralne 15
1.36 *Bozony cechowania, macierz masy i diagonalizacja, oddziaływanie w Modelu Standardowym, propagatory bozonów cechowania . . . 15
1.37 Spontaniczne naruszenie symetrii w Modelu Standardowym . . . 15
1.38 Mechanizm Higgsa w Modelu Standardowym . . . 16
1.39 *Oddziaływania bozonów Higgsa w Modelu Standardowym . . . 16
1.40 *Diagonalizacja macierzy masy fermionów (kwarków i leptonów), macierz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa . . . 16
1.41 Relacje pomiędzy teorią V-A, IVB (hipoteza bozonu pośredniczącego), a Modelem Standardowym . . . 16
1.42 *Parametry Modelu Standardowego i metody ich wyznaczania . . . 16
1.43 FCNC w Modelu Standardowym (jakościowo) . . . 17
1.44 Mechanizmy produkcji bozonów pośredniczących . . . 17
1.45 Mechanizmy produkcji bozonu Higgsa . . . 17
1.46 *QCD – Lagrangian i symetrie . . . 18
1.47 Dlaczego oczekujemy fizyki poza Modelem Standardowym? . . . 18

2 QFT 18
2.1 Rozwiązanie zadania - samooddziaływanie elektronu . . . 18
2.2 Preliminaria: reprezentacje grupy Lorentza, przestrzeń Focka, przyczynowość, antycząstki, pola kwantowe, twierdzenie Noether . . . 21
2.3 *Procesy rozpraszania w teorii pola skalarnego . . . 21
2.4 *Renormalizacja w teorii pola skalarnego na poziomie 1-pętlowym . . . 21
2.5 *Równania grupy renormalizacji, biegnące stałe sprzężenia . . . 21
2.6 *1-pętlowa struktura elektrodynamiki kwantowej, biegnąca stała sprzężenia w QED . . . 21
2.7 *Procesy rozpraszania w QED. . . . 21
2.8 *Definicja obserwabli fizycznych, niezależność fizycznej masy i elementów macierzy S od skali renormalizacji . . . 21
2.9 *Potencjał efektywny poprawiony przez równania grupy renormalizacji w bezmasowej teorii ϕ^4 . . . 21

1 Wstęp do Teorii Oddziaływań Fundamentalnych

1.1 Zasada najmniejszego działania i równania ruchu w klasycznej teorii pola

Klasyczne działanie w mechanice klasycznej jest postaci $S = \int L dt$. W teorii pola robimy dwie zamiany - zamiast zależności od położenia i pochodnej czasowej tworzymy zależność od pola (nie definiując szczególnie czym ono jest) i jego pierwszych pochodnych. Poza tym postulujemy byt znany jako *gęstość Lagranżjanu* - zgadzając się na to że postać lagranżjanu w danym puncie zależy tylko od parametrów pola w tym punkcie czasoprzestrzeni. Zatem $L = \int \mathcal{L} d^3x$, natomiast $S = \int \mathcal{L} d^4x$. Poprzez odpowiednie operacje możemy stąd przejść do właściwych równań.

1.2 Równania ruchu w teorii rzeczywistego pola skalarnego

Założmy gęstość lagranżjanu (od tej pory nazywaną po prostu *lagranżjanem*) w postaci:

$$\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 - m^2\phi^2$$

Można pokazać, że jest to ogólna postać - w przypadku 'brzydszych' lagranżjanów pole można odpowiednio zredefiniować do eleganckiej postaci. Równania E-L:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

prowadzą do równania ruchu znanego jako KG: $(\Box + m^2)\phi(x) = 0$. Rozwiązanie tego równania w układzie położeń jest... trudne. Dlatego przechodzi się do przestrzeni pędów - jest to legalne w przypadku liniowych równań różniczkowych - i prowadząc odwrotną transformację Fouriera uzyskujemy rozwiązanie postaci:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3(2E_p)^{1/2}} (a_p e^{-ipx} + a_p^* e^{ipx})\Big|_{p^0=E_p}$$

Gdzie $E_p^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ - pierwiastek (dodatni) jest tutaj ze względu na normalizację. Można dodatkowo przedefiniować równania tak aby zamiast lagranżjanem posługiwać się hamiltonianem (poprawnie - gęstość hamiltonianiu, wyrażeń używam zamiennie) poprzez definiowanie:

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi$$

Natomiast sam hamiltonian jest postaci:

$$\mathcal{H} = \Pi_\phi \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2}[\Pi_\phi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2]$$

Nasz dodatkowy sukces polega na tym że hamiltonian jest teraz zerową składową tensora energii-pędu!

W teorii rzeczywistego pola skalarnego możemy dodatkowo zdefiniować odpowiedni iloczyn skalarny $< \phi|\varphi >= i/2 \int d^3x \phi \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi$ - dwie funkcje spełniające równanie KG będą

wzajemnie ortogonalne. Po fakcie też funkcja będzie ortogonalna sama do siebie- co jest pewnym mankamentem teorii.

1.3 Równania ruchu w teorii zespolonego pola skalarnego z globalną symetrią U(1) i bez niej

Załóżmy teraz istnienie dwóch realnych pól skalarnych ϕ_1, ϕ_2 z tą samą masą m - możemy je połączyć w pojedyncze równanie przez $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$. Zsumowane działanie KG będzie postaci:

$$S = \int d^4x(\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi)$$

Alternatywnie, zamiast ϕ_1, ϕ_2 możemy definiować ϕ i ϕ^*. Rozwiązanie będzie tym razem asymetryczne - stąd możliwość zespolonego wyniku:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}(a_p e^{-ipx} + b_p^* e^{ipx})\Big|_{p^0=E_p}$$

Jeśli Lagranżjan jest bardziej asymetryczny możemy próbować definiować go jako:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \phi^* \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \phi$$

Macierz można zapisać jako $\mathcal{M}^2$. Prowadzi to do równań ruchu:

$$(\Box + \mathcal{M}^2)\phi = 0$$

1.4 Twierdzenie Noether dla symetrii wewnętrznych

Dokonujemy transformacji $\phi \to \phi', x \to x' = x$. Odpowiednia wariacja działania musi być zerowa- opisujemy to równaniem:

$$\delta S = \int d^4x \Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\partial_a \phi \epsilon^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \partial_a \phi \epsilon^a\Big] = 0$$

Rozwiązanie prowadzi do równania:

$$\partial_\mu j_a^\mu = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_a \phi\right] = 0$$

Mamy tutaj pewną swobodę definicji. Biorąc tensor antysymetryczny $A^{\mu\nu}$ możemy do tak zdefiniowanego czteroprądu dodać fragment $\partial_\nu A^{\mu\nu}$.

1.5 Symetria translacyjna, twierdzenie Noether i 4-wektor pędu w teorii pola

Biorąc globalną symetrię $x \to x' = x + \epsilon$ możemy wyprowadzić tensor energii-pędu. Całkując zerowe współczynniki otrzymujemy czteropęd:

$$P^\mu = \int d^3x \theta^{0\mu}$$

1.6 Kowariantne sformułowanie elektrodynamiki klasycznej

Definiujemy tensor antysymetryczny $F^{\mu\nu}$ - ponieważ i pochodna, i czteropotencjał są kowariantne, ów tensor również jest kowariantny. Nasz lagranżjan dla pustej przestrzeni będzie równy $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Wyróżniając fizyczne wektory: $E^i = -F^{0i}$ oraz $B^i = -\epsilon^{ijk}F^{jk}$ otrzymujemy dwa pierwsze równania Maxwella z równań ruchu. Redefiniując tensor F poprzez $F'^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ otrzymujemy kolejne dwa równania Maxwella.

1.7 Tensor energii-pędu dla elektrodynamiki klasycznej

Możemy również zdefiniować tensor energii-pędu z poprawką symetryzującą $\partial_\rho(F^{\mu\rho}A^\nu)$. Poprawiony tensor energii pędu jest postaci:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\rho}F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^2$$

Jeśli chcemy uwzględnić również czteroprąd w równaniach, do Lagranżjanu musimy dodać fragment $A_\mu j^\mu$.

1.8 Konstrukcja elektrodynamiki skalarnej, zachowany prąd Noether

Jeśli chcemy teraz uwzględnić rozszerzony o pola skalarne Lagranżjan, będzie on (wstępnie) postaci:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^2$$

Oczywiście taki Lagranżjan ma globalną symetrię U(1). Co jednak, jeśli chcemy na siłę wprowadzić symetrię lokalną? Problem stanowią pochodne - przestają być wtedy kowariantne. Jeśl chcemy koniecznie aby pochodna była ponownie kowariantna, musimy ją zredefiniować:

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$$

dla pola A^μ z symetrią cechowania $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta$, gdzie θ jest funkcją skalarną, 0-tensorem. Symetria dotycząca funkcji skalarnej $\phi \to \phi e^{iq\theta(x)}$. Ostateczny Lagranżjan jest postaci:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}_\mu\phi)^*\mathcal{D}^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^2$$

1.9 Konstrukcja teorii pola z nieabelową symetrią cechowania, pochodna kowariantna

Powyższe rozważania można uogólnić na symetrie nieabelowe. Załóżmy że mamy pole postaci wektora zespolonego n-tego stopnia - odpowiadająca mu symetria jest typu SU(n). Odpowiednia transformacja jest typu:

$$U = e^{\alpha_a(x)T_a}$$

gdzie T_a jest zespołem macierzy n x n będących generatorami grupy. Latwo policzyć że jest ich $n^2 - 1$. Dla owej grupy możemy również zdefiniować *komutator*, tworząc strukturę *grupy Liego*.

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$$

Współczynniki f_{abc} nazywamy *stałymi struktury* grupy.

Chcąc w sposób analogiczny przywrócić symetrię poprzez pola cechowania musimy stworzyć owych pól tyle, ile mamy generatorów grupy. Zakładając że pole G^a_μ transformuje się w sposób:

$$G^a_\mu \to G^a_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha_a - f_{abc}\alpha_b G^a_\mu,$$

definiujemy pochodną kowariantną na sposób:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igT_a G^a_\mu.$$

Finalny Lagranżjan ma postać:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q - g(\bar{q}\gamma^\mu T_a q)G^a_\mu - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a,$$

gdzie pochodna pola cechowania jest postaci $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - gf_{abc}G^b_\mu G^c_\nu$.

Oddziaływania Lagranżjanu są postaci:

$$\mathcal{L} = q^2 + G^2 + gq^2G + gG^3 + g^2G^4$$

1.10 Równanie Diraca, oddziaływanie z polami cechowania

Podstawowy Lagranżjan Diraca definiujemy jako:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi$$

Chcąc uwzględnić oddziaływanie z polem cechowania (czyli uniezależnić Lagranżjan od lokalnego cechowania U(1)) definiujemy kowariantną pochodną Diraca:

$$D\!\!\!\!/ = \partial\!\!\!/ + iqA\!\!\!/$$

1.11 Model Goldstona i spontaniczne naruszenie globalnej symetrii

Spontaniczne łamanie symetrii można rozważyć poprzez prosty układ. Weźmy prosty Lagranżjan dla pola skalarnego - oczywiście pola będą najwyżej w czwartej potędze:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - (\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\phi^4).$$

Teraz szukamy minimum energetycznego. Zakładamy oczywiście że 'potencjał' zależy tylko od samych pól, nie ich pochodnych - oraz że pochodna potencjału po polu będzie odpowiadała pochodnej Lagranżjanu po polu. Szukając minimum ustalamy warunek:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0$$

Co prowadzi do trzech ekstremów - jednego lokalnego maksimum dla $\phi = 0$ (które nas niewiele interesuje) oraz dwa globalne minima dla $\phi = \pm v$, gdzie $b = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$. Możemy zatem wybrać jedno z minimów i przekształcić pole ϕ na postać $\phi(x) = v + \eta(x)$ (druga możliwość może zawsze być osiągnięta przez symetrię odbicia). Wrzucając tak zdefiniowane pole w Lagranżjan otrzymujemy:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2\eta^2 \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + const.$$

Człon λv^2 możemy zinterpretować jako masę! Kolejne człony są bardziej zagadkowe.

Jeśli natomiast weźmiemy teraz ϕ dalej skalarne, ale zespolone, lądujemy z następującym Lagranżjanem:

$$\mathcal{L} = \partial\phi^*\partial\phi - \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

Ponownie szukając minimów dostajemy $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$. To prowadzi do $\phi_{min} = \left(\frac{-\mu^2}{2\lambda}\right)^{1/2} e^{i\theta_{min}}$. Wybierając $\theta_{min} = 0$ i rozwijając ϕ wokół minimum otrzymujemy funkcję $\phi = \phi_{min} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma(x) + i\eta(x))$ - co prowadzi nas do nowej, masywnej cząstki σ i bezmasywnej cząstki η! To drugie nazywamy **bozonem Goldstona** - i jest toto artefaktem teorii.

1.12 Mechanizm Higgsa dla symetrii U(1)

Narzućmy teraz ponownie procedurę znajdywania pola cechowania w polu o symetrii U(1). Nakazujemy równaniom warunek **lokalnej** symetrii U(1), następnie przekształcamy pole tak by było rozwijane wokół stanu o najniższej energii, w ten sposób uzyskujemy równania postaci:

$$\mathcal{L} = (\partial + ieA)\phi^*(\partial - ieA)\phi - \mu^2\phi^*\phi - \lambda|\phi|^2 - 1/4F^2$$

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial\xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\eta)^2 - v^2\lambda\eta^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A^2 - evA_\mu\partial\xi - 1/4F^2 + interaction.$$

Jest to niepokojące - najwyraźniej właśnie przydzieliliśmy masę bezmasowemu polu cechowania! Nie byłoby to tak bardzo złe gdyby nie fakt że mamy też pewną asymetrię. Zatem pora jeszcze raz zredefiniować pole - tym razem przyjmując:

$$\phi \to \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu \theta$$

Wrzucając to cholerstwo otrzymujemy (wreszcie!) piękne, symetryczne człony teorii, kosztem złamanej symetrii.

1.13 Kwantowanie swobodnego rzeczywistego pola skalarnego

W (drugiej) kwantyzacji dla rzeczywistego pola skalarnego chcemy zmienić pojęcie pola ϕ na **operator gęstości pola** - stowarzyszając z nim odpowiedni operator gęstości pędu. Zasadnicze równanie do którego będziemy dążyć to relacja komutacyjna:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

odpowiednio promujemy liczby a_p, a_p^* do postaci operatorów:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}}\Big[a_p e^{-ipx} + a^\dagger e^{ipx}\Big]$$

W ten sposób osiągamy drugą, równoważną definicję drugiej kwantyzacji, poprzez operatory kreacji i anihilacji:

$$[a_p, a_q^\dagger] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

Warto wspomnieć jeszcze o normalizacji. W przypadkach kiedy postać δ nie jest oczywista, dobrze jest zastąpić wyrażenie $(2\pi)^3\delta^3$ objętością V przestrzeni - po czym przejść z ową objętością do nieskończoności (co zazwyczaj nie jest konieczne). Owa regularyzacja- przyjęcie skończonej objętości przestrzeni - nazywana też jest obcięciem podczerwonym - ponieważ nie pozwala na skrajnie małe wartości pędów cząstek.

1.14 Operator energii i pędu w teorii rzeczywistego pola skalarnego, uporządkowanie normalne

Już wcześniej definiowaliśmy energię i pęd - a raczej pęd i hamiltonian - w sposób:

$$\Pi = \partial_0 \phi$$

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \frac{1}{2}(a_p^\dagger a_p + a_p a_p^\dagger) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \Big(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2}[a_p, a_p^\dagger]\Big)$$

To cholerstwo jest rozbieżne! Drugi człon jest energią próżni i zależy od czwartej potęgi parametru obcięcia ultrafioletu. Możemy to albo wrednie urżnąć, albo zdefiniować *uporządkowanie normalne*, które zapewni nam zerową energię dla stanu próżni.

Podobnie możemy definiować (kwantyzować?) pęd:

$$P^i = \int d^3x : \theta^{0i} := \int d^3x : \partial^0\phi\partial^i\phi := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i a_p^\dagger a_p.$$

1.15 Kwantowanie swobodnego zespolonego pola skalarnego

Procedura tutaj będzie bardzo podobna - z tym że wyróżnimy tutaj dwa operatory, już nie-hermitowskie, ϕ i $\phi^\dagger$:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} \left[a_p e^{-ipx} + b^\dagger e^{ipx}\right]$$

$$\phi(x)^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} \left[a_p^\dagger e^{ipx} + b_p e^{-ipx}\right]$$

1.16 Operator energii i pędu w teorii zespolonego pola skalarnego

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p (a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p)$$

$$P^i = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} p^i (a_p^\dagger a_p + b_p^\dagger b_p)$$

1.17 Operator ładunku U(1) w teorii zespolonego pola skalarnego

No, teraz coś konkretniejszego. W klasycznej teorii pola dla symetrii U(1) ustaliliśmy gęstość czteroprądu jako:

$$j_\mu = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi$$

Zatem odpowiedni ładunek w naszej kwantowej teorii to:

$$Q_{U(1)} = i \int d^3x \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial_0} \phi,$$

co prowadzi do rozbieżnych członów i "ładunku próżni" - rzeczy całkowicie nieakceptowalnej w naszej teorii. Po zastosowaniu uporządkowania normalnego otrzymujemy już znacznie lepszy i bardziej oczekiwany wynik:

$$Q_{U(1)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_p^\dagger a_p - b_p^\dagger b_p)$$

1.18 Propagator Feynmana w teorii rzeczywistego pola skalarnego, reprezentacja pędowa

Chcemy uporządkować chronologicznie kreowanie pól, co oznaczamy zwyczajowo przez:

$$< 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0 >$$

Należy tutaj pamiętać że pola nie należą do teorii swobodnej tylko oddziaływań. W przypadku rzeczywistym możemy rozdzielić pole na część anihilującą i kreującą, kolejno:

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} a_p e^{-ipx}$$

$$\phi^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} a_p^\dagger e^{ipx}$$

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$$

Natomiast sam operator porządkowania chronologicznego zamienia miejscami - bez zmiany znaku - operatory tak, aby ich czasowe współrzędne następowały po sobie, tj. 'najpóźniejsze' zdarzenie jest najdalej po lewej, 'najwcześniejsze' - najdalej po prawej.

Proste wyliczenia pokazują że dla porządkowania chronologicznego dwóch pól otrzymujemy:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} =: \phi(x)\phi(y) : +[\phi^+(x), \phi^-(y)]$$

Ostatni wyraz określamy właśnie jako propagator:

$$D(x-y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)]$$

albo:

$$D(x-y) = \theta(x^0 - y^0)[\phi^+(x), \phi^-(y)] + \theta(y^0 - x^0)[\phi^+(y), \phi^-(x)]$$

Wstawiając tutaj postać całkową - i korzystając ze znanej tożsamości całkowej na funkcję skoku - otrzymujemy ostateczną postać propagatora Feynmana:

$$D(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

Można również zapisać ów propagator w postaci wygodniejszej, pędowej:

$$\tilde{D}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Sprawdzając przez bezpośrednie wyliczenia okazuje się że propagator Feynmana jest po prostu funkcją Greena dla równania KG:

$$(\Box_x + m^2)D(x-y) = -i\delta^4(x-y)$$

1.19 Propagator Feynmana w teorii zespolonego pola skalarnego, reprezentacja pędowa

1.20 Kwantowanie swobodnego pola fermionowego

Równania ruchu dla Lagranżjanu Diraca mają rozwiązanie w postaci następującego spinora:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_p^s u^s(p) e^{-ipx} + b_p^{s\dagger} v^s(p) e^{ipx} \right)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_p^s \bar{v}^s(p) e^{-ipx} + a_p^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ipx} \right)$$

1.21 Hamiltonian w teorii swobodnego pola fermionowego

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_p \left(a_p^{s\dagger} a_p^s + b_p^{s\dagger} b_p^s \right)$$

1.22 Kwantowanie swobodnego pola elektromagnetycznego w cechowaniu kowariantnym, fizyczne stopnie swobody

Po pierwsze przyjmujemy cechowanie radiacyjne, w którym $A_0 = 0$ oraz $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Następnie rozwiązujemy równania ruchu - które tutaj przyjmują postać bezmasowego równania KG - z dwiema polaryzacjami:

$$\mathbf{A} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda=1,2} \left[\epsilon(p,\lambda) a_{p,\lambda} e^{-ipx} + \epsilon^*(p,\lambda) a_{p,\lambda}^* e^{ipx} \right]$$

Oczywiście w trakcie kwantyzacji zamieniamy liczby $a, a*$ na odpowiednie operatory kreacji i anihilacji. Oczekujemy uzyskania następującej relacji komutacyjnej:

$$[a_{p,\lambda}, a_{q,\lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p-q) \delta_{\lambda\lambda'}$$

1.23 Hamiltonian i operator pędu w teorii swobodnego pola elektromagnetycznego

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x : \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \omega_k a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int d^3x : \mathbf{E} \times \mathbf{B} := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1,2} \mathbf{k} a_{k,\lambda}^\dagger a_{k,\lambda}$$

1.24 Obraz oddziaływania, operator ewolucji i perturbacyjne rozwiązanie równania ruchu dla operatora ewolucji

Obraz oddziaływania dla pola, analogicznie do obrazu Heinsenberga, definiuje się jako:

$$\phi_I(t,x) = e^{iH_0(t-t_0)}\phi_I(t_0,x)e^{-iH_0(t-t_0)}$$

Teraz natomiast, definiując operator w obrazie Heinsenberga:

$$\phi(t,x) = e^{iH\tau}\phi(t_0,x)e^{-iH\tau} = e^{iH\tau}e^{-iH_0\tau}\phi_I(t_0,x)e^{iH_0\tau}e^{-iH\tau}$$

Dobrze jest tutaj zdefiniować operator **ewolucji czasowej**:

$$U(t,t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$$

Idąc dalej, przez kilka prostych przekształceń możemy dojść do równania różniczkowego określającego nasz operator ewolucji czasowej:

$$i\frac{\partial U}{\partial t} = H_I(t)U(t,t_0)$$

$$U(t,t_0) = T\left\{\exp\left[-i\int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')\right]\right\}$$

1.25 Twierdzenie Wicka

$$< 0|T\{\phi_1\phi_2...\phi_n\}|0 >= D_{12}D_{34}...D_{n-1,n} + wszystkieinneuklady$$

1.26 Propagator Feynmana dla pola fermionowego

Podstawowe założenie jest niejako odwrotne niż w przypadku propagatora dla bozonów - zamiana pól miejscami powoduje dołożenie znaku minus. W dalszym ciągu operator porządkowania chronologicznego ma na celu uporządkowanie pól tak aby zdarzenia wcześniejsze następowały przed późniejszymi.

$$S(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{S}(p)e^{-ip(x-y)}$$

$$\tilde{S}(p) = \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$$

albo w skrócie:

$$\tilde{S}(p) = \frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}$$

Oczywiście taki propagator spełnia równanie:

$$(i\not{\partial}-m)S(x-y) = i\delta^4(x-y)$$

1.27 Propagator Feynmana dla pola cechowania o symetrii U(1)

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

1.28 Przekrój czynny i szerokość rozpadu

Definiujemy sobie macierz rozpraszania S jako:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)iM_{fi}$$

Następnie poprzez przekształcenia staramy się znaleźć różniczkowe prawdopodobieństwo że i-ta cząsteczka będzie miała pęd zawarty w przedziale $p_i, p_i + dp_i$:

$$dw = (2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)VT|M_{fi}|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{Vd^3p_i}{(2\pi)^3}$$

(co po półgodzinnym wgapianiu się jest całkiem zrozumiałe). Stowarzyszona z nią *szerokość rozpadu* jest prawdopodobieństwem na całkowity czas:

$$d\Gamma = (2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f)V|M_{fi}|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{Vd^3p_i}{(2\pi)^3}$$

Poprzez odpowiednio 'ludzkie' zredefiniowanie macierzy rozproszeń $M_{fi} \to \mathcal{M}_{fi}$ uzyskujemy finalną postać różniczki:

$$d\Gamma = (2\pi)^4\delta^4(p - \sum_i p_i)\frac{1}{2E_p}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3(2E_i)}$$

Możemy tutaj dodatkowo zdefiniować n-ciałową przestrzeń fazową $d\Phi$:

$$d\Phi^n \equiv (2\pi)^4\delta^4(P_i - P_f) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

wtedy to nasze równanie staje się bardzo eleganckie:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_p}|\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi^n$$

Natomiast przekrój czynny σ jest dany poprzez:

$$d\sigma = \frac{1}{4I}|\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Phi^n$$

1.29 Dwu-cząstkowa przestrzeń fazowa i przekrój czynny dla procesów $2 \to 2$

Zdefiniowana wcześniej przestrzeń fazowa w przypadku dwóch ciał jest najwygodniejsza do rozważenia przy użyciu zmiennych Mandelstama.

$$s = (p_1 + p_2)^2,$$
$$t = (p_1 - p_3)^2,$$
$$u = (p_1 - p_4)^2$$

Oczywiście te zmienne są lorentzowsko niezmiennicze i spełniają relację:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

1.30 Rozpraszanie Comptona w elektrodynamice kwantowej

Korzystając z wcześniejszych wyprowadzeń możemy określić sposób postępowania przy rozporszeniu Comptona. Określamy 2-ciałową przestrzeń fazową, następnie korzystamy z macierzy rozproszeń, która w pierwszym przybliżeniu składa się z dwóch diagramów.

1.31 Reguły Feynmana w przestrzeni położeń dla elektrodynamiki kwantowej

Założenia takie że korzystamy z propagatorów całkowanych po pędach dla wewnętrznych linii, ustalonych parametrów dla linii zewnętrznych i odpowiednich parametrów dla każdego vertexu. Natomiast każda pętla fermionowa otrzymuje znak -.

1.32 Reguły Feynmana w przestrzeni pędów dla elektrodynamiki kwantowej

Hmm, tutaj nie bardzo rozumiem. Mówimy o rozpisaniu wszystkich możliwych diagramów n-tego rzędu?

1.33 Przekrój czynny na rozpraszanie w QED

Mówimy o sumowaniu po spinach?

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \sum_{s_i} \sum_{s_f} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

1.34 Sektor leptonowy w Modelu Standardowym, prądy naładowane i neutralne

W przypadku leptonów wyróżniamy dwie symetrie, SU(2) oraz U(1) - pierwsza wiąże się z ładunkiem izospinu, druga - z hiperładunkiem. Pewnym złamaniem symetrii jest fakt że lewoskrętne fermiony stanowią dublet izospinowy χ_L, natomiast prawoskrętne - singlety ψ_R. Izodublet składa się z neutrina i odpowiedniego naładowanego leptonu - np. elektronu - izosinglet jedynie z naładowanego leptonu.

Narzucając warunek kowariantności dla członów kinetycznych tak zefiniowanego lagranżjanu dostajemy w wyniku dwa typy wektorowych pól cechowania: W_j^μ oraz B^μ. Odpowiedni lagranżjan oddziaływań leptonów z polami cechowania dany jest:

$$\mathcal{L}_1^{(l)} = -gJ_i^\mu(x)W_{i\mu}(x) - g'J_Y^\mu(x)B_\mu(x)$$

Tutaj J_i i J_Y interpretujemy jako **prądy nienaładowane** - w sensie zwyczajnego ładunku elektrycznego. Natomiast z relacji wynika że mogą być one prosto powiązane z prądem EM relacją:

$$\frac{S^\mu}{e} = J_Y^\mu + J_3^\mu$$

Definiujemy teraz:

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1 - W_2]$$

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[W_1 + W_2]$$

Natomiast pole Z_μ^0 i zwyczajne pole EM będzie zdefiniowane przez obrót o **kąt Weinberga**:

$$W_{3\mu} \equiv \cos\theta_W Z_\mu(x) + \sin\theta_W A_\mu(x)$$
$$B_\mu \equiv -\sin\theta_W Z_\mu(x) + \cos\theta_W A_\mu(x)$$

Teraz poprzez odpowiednie przekształcenia (...znowu)

1.35 Sektor kwarkowy w Modelu Standardowym, prądy naładowane i neutralne

Bardzo podobnie, z kilkoma różnicami - raz, z symetrii SU(3) uzyskujemy pole cechowania gluonów, nieabelowe, z ośmioma generatorami. Dwa, pozwalamy na przemiany kwarków przy udziale prądów neutralnych.

1.36 *Bozony cechowania, macierz masy i diagonalizacja, oddziaływanie w Modelu Standardowym, propagatory bozonów cechowania

1.37 Spontaniczne naruszenie symetrii w Modelu Standardowym

Bierzemy Lagranżjan postaci:

$$\mathcal{L}_2 = \left|\left(i\partial_\mu - g\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}_\mu - g'\frac{Y}{2}B_\mu\right)\right|^2 - V(\phi)$$

Jeśli chcemy aby Lagranżjan był niezależny od cechowania musimy utrzymać ϕ_i w symetrii SU(2)xU(1).

1.38 Mechanizm Higgsa w Modelu Standardowym

Zaczynamy od Lagranżjanu postaci:

$$\mathcal{L}_3 = -G_e \left[(\bar{\nu_e}, \bar{e})_L \left(\begin{smallmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{smallmatrix} \right) e_R + \bar{e}_R (\phi^-, \bar{\phi}^0) \left(\begin{smallmatrix} \nu_e \\ e \end{smallmatrix} \right)_L \right]$$

Teraz zakładamy że ów lagranżjan ma jakieś minimum energetyczne poza zerem - łamiemy symetrię i wstawiamy:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

Spontaniczne łamanie symetrii w tym momencie polega na wybraniu pola $h(x)$ rzeczywistego - zmieniamy dublet w singlet. Zakładając postać masy typu:

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}}$$

Możemy w Lagranżjanie wreszcie wygenerować człon masowy:

$$\mathcal{L}_3 = -m_e \bar{e} e = \frac{m_e}{v} \bar{e} e h.$$

1.39 *Oddziaływania bozonów Higgsa w Modelu Standardowym

1.40 *Diagonalizacja macierzy masy fermionów (kwarków i leptonów), macierz Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

1.41 Relacje pomiędzy teorią V-A, IVB (hipoteza bozonu pośredniczącego), a Modelem Standardowym

O ile rozumiem, jest to różnica w postrzeganiu takich procesów jak rozpad μ^- - według teorii V-A rozpad następuje bezpośrednio z wytworzeniem trzech produktów, natomiast według teorii IVB - z uczestnictwem bozonu pośredniczącego.

1.42 *Parametry Modelu Standardowego i metody ich wyznaczania

1. 9 fermion masses
2. 3 CKM mixing angles + 1 phase
3. 1 electromagnetic coupling constant
4. 1 strong coupling constant
5. 1 weak coupling constant
6. 1 Z^0 mass
7. 1 Higgs mass

1.43 FCNC w Modelu Standardowym (jakościowo)

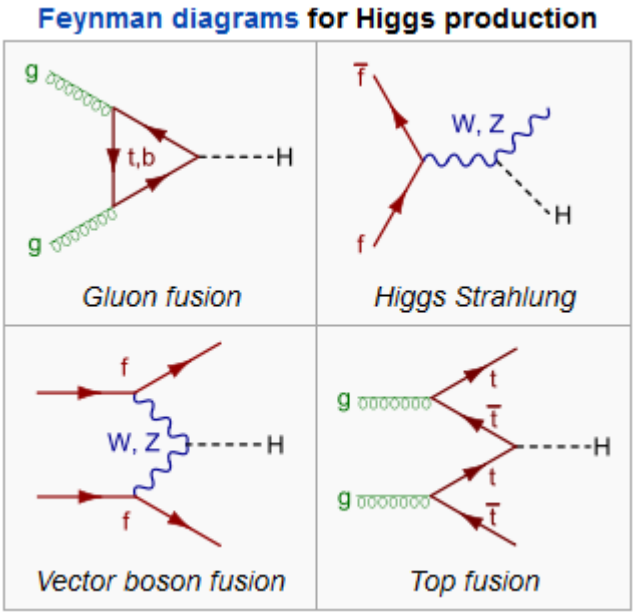
Flavor Changing Neutral Current - hipotetyczny mechanizm mający jakoby zmieniać zapach fermionów bez zmiany ich ładunku. Teoretycznie możliwy, nigdy nie zauważony doświadczalnie.

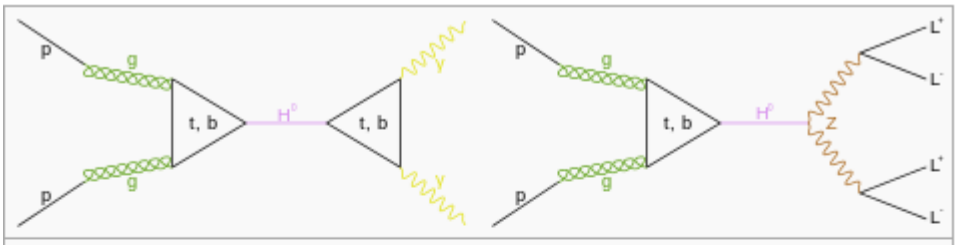
1.44 Mechanizmy produkcji bozonów pośredniczących

Anihilacja par cząstka-antycząstka.

1.45 Mechanizmy produkcji bozonu Higgsa

1. Z dwóch gluonów - te oddziałują ze sobą i w pętli kwarkowej tworzą bozon Higgsa
2. W oddziaływaniu dwóch fermiów - przy wymianie bozonu pośredniczącego ten jest na tyle zasobny w energię że produkuje bozon Higgsa
3. przy anihilacji pary cząstka-antycząstka produktem może być bozon pośredniczący - który dodatkowo wypromieniowuje Higgsa
4. przy zderzeniu dwóch gluonów tworzą się dwa kwarki t i Higgs





Feynman diagrams showing the cleanest channels associated with the low-mass (~125 GeV), Higgs boson candidate observed by ATLAS and CMS at the LHC. The dominant production mechanism at this mass involves two gluons from each proton fusing to a Top-quark Loop, which couples strongly to the Higgs field to produce a Higgs boson.

Left: Diphoton channel: Boson subsequently decays into 2 gamma ray photons by virtual interaction with a W boson loop or top quark loop.

Right: 4-Lepton "golden channel": Boson emits 2 Z bosons, which each decay into 2 leptons (electrons, muons).

Experimental analysis of these channels reached a significance of 5-sigma.[4][117] The analysis of additional vector boson fusion channels brought the CMS significance to 4.9-sigma.[4][117]

1.46 *QCD – Lagrangian i symetrie

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}$$

Gdzie $\psi = \psi_R + \psi_L$, definiowane wcześniej.

1.47 Dlaczego oczekujemy fizyki poza Modelem Standardowym?

Ciemna materia, ciemna energia, grawitacja - problem pieprzonej kwantyzacji teorii względności. Jakiekolwiek układy makroskopowe?

2 QFT

2.1 Rozwiązanie zadania - samooddziaływanie elektronu

W elektrodynamice kwantowej obliczyć za pomocą regularyzacji wymiarowej skończoną część jednopętlowej poprawki do propagatora elektronu.

Rozważmy prosty przypadek samoodziaływania elektronu. W rozważaniach ograniczymy się tylko do pojedynczej pętli. Odpowiednia część jest dana wzorem:

$$\frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}\big[-i\Sigma_2(p)\big]\frac{i(\not{p}+m_0)}{p^2-m_0^2}$$

gdzie

$$-i\Sigma_2(p)=(-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\gamma^\mu\frac{i(\not{k}+m_0)}{k^2-m_0^2+i\epsilon}\gamma_\mu\frac{-i}{(p-k)^2-\mu^2+i\epsilon}.$$

Skorzystamy teraz z tożsamości:

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1\frac{dx}{[Ax-B(x-1)]^2}$$

i korzystając z tej relacji zapiszemy funkcję podcałkową w następujący sposób:

$$\frac{1}{k^2-m_0^2+i\epsilon}\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\epsilon}=\int_0^1\frac{dx}{[k^2-2xk\cdot p+xp^2-x\mu^2-(1-x)m_0^2+i\epsilon]^2}$$

W ten sposób poprzedni wzór możemy zapisać, korzystając z przekształcenia $l=k-xp$:

$$-i\Sigma_2(p)=-e^2\int_0^1dx\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{-2x\not{p}+4m_0}{[l^2-\Delta+i\epsilon]^2}$$

gdzie wartość $\Delta=-x(1-x)p^2+x\mu^2+(1-x)m_0^2$. Całka po l jest rozbieżna.

Chcemy teraz podjąć się regularyzacji wymiarowej. W pierwszej kolejności dokonujemy obrotu Wicka, następnie zadajemy regularyzację wymiarową:

$$\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{[l^2-\Delta]^2}\longrightarrow\frac{i}{(2\pi)^d}\int_0^\infty\frac{d^dl}{[l^2+\Delta]^2}=\int\frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d}\cdot\int_0^\infty dl\frac{l^{d-1}}{(l^2+\Delta)^2}$$

Można pokazać że:,

$$\int d\Omega_d=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Natomiast drugi czynnik równania:

$$\int_0^\infty dl\frac{l^{d-1}}{(l^2+\Delta)^2}=\frac{1}{2}\int_0^\infty d(l^2)\frac{(l^2)^{d/2-1}}{(l^2+\Delta)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2}\int_0^1dxx^{1-d/2}(1-x)^{d/2-1}$$

jest definicją funkcji beta! Docieramy zatem do ostatecznej postaci:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2+\Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^d/2} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

Przybliżenie tej całki wokół bieguna daje wynik:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2+\Delta)^2} \longrightarrow \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta + const.\right)$$

gdzie Δ zależy od p! Jesteśmy już bardzo blisko.

Wracając do postaci Σ_2, po podsumowaniu dotychczasowych osiągnięć możemy zauważyć, że:

$$\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int l^3 dl \frac{\gamma^\mu(\not{l} - \not{p}x + m_0)\gamma_\mu}{(l^2+\Delta)^2}$$

Tutaj nie jestem do końca pewien rozsądności postępowania - obłożenie czynnikami γ działa jak wzięcie śladu z czynników. Jeśli ilość macierzy γ jest nieparzysta, ślad będzie niezmiennie zerowy. Jeśli jest parzysta, wynik będzie liczbą wymiarów spinora - czyli 4:

$$\Sigma_2(p) = -4m_0 e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d\Omega_d}{(2\pi)^d} \int \frac{l^{d-1} dl}{(l^2+\Delta)^2}$$

Wracając do wcześniejszych rozważań, wiemy że owa całka rozwija się wokół bieguna $d = 4 - \epsilon$ w:

$$\Sigma_2(p) = -4m_0 e^2 \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \log\Delta + const.\right)$$

Teraz odrobina ideologii: chcemy policzyć **różnicę** w energii, nie samą energię - która, według tych równań, jest nieskończona. Nasza realna funkcja Σ przyjmie postać:

$$\hat{\Sigma}_2(p) = \Sigma(p) - \Sigma(0)$$

Zatem problem sprowadza się do rozwiązania całki:

$$\hat{\Sigma}_2(p) = 4m_0 e^2 \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^2} \log\frac{\Delta}{\Delta_0}$$

Po podstawieniu jawnej postaci $\Delta = (1-x)m_0^2 - x(1-x)p^2$ otrzymujemy:

$$\hat{\Sigma}_2(p) = 4m_0 e^2 \int_0^1 \frac{dx}{(4\pi)^2} \log\frac{m_0^2 - xp^2}{m_0^2} = \frac{m_0 e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \log\left(1 - x\frac{p^2}{m_0^2}\right)$$

Wiedząc, że $\int \log(1-ax)dx = ((ax-1)\log(1-ax) - ax)/a$ możemy policzyć całkę bezpośrednio. Zakładamy tutaj, że wartość pędu jest mniejsza niż energia spoczynkowa elektronu.

$$\hat{\Sigma}_2(p) = \frac{m_0 e^2}{4\pi^2}\Big[(1-\frac{m_0^2}{p^2})\log(1-\frac{p^2}{m_0^2})-1\Big]$$

2.2 Preliminaria: reprezentacje grupy Lorentza, przestrzeń Focka, przyczynowość, antycząstki, pola kwantowe, twierdzenie Noether

Grupę Lorentza definiujemy jako grupę przekształceń liniowych współrzędnych:

$$x^\mu \to x'^\mu - \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

które to pozostawiają jako niezmiennik interwał czasoprzestrzenny. Z założenia grupa Lorentza nie zmienia metryki czasoprzestrzeni.

Przestrzeń Focka określamy jako przestrzeń z wyróżnionym **stanem próżni** oraz operatorami kreacji i anihilacji, dla których

$$a_p|0>=0$$
$$<0|a_p^\dagger = 0$$

Przyczynowość: bardzo ważne jest by operatory pomiaru rozdzielone interwałem przestrzennym niezmiennie ze sobą komutowały. Również niedopuszczalne jest niezerowe prawdopodobieństwo dla propagacji cząstek z prędkością nadświetlną - w szczególności przesyłanie informacji z prędkością nadświetlną.

2.3 *Procesy rozpraszania w teorii pola skalarnego

2.4 *Renormalizacja w teorii pola skalarnego na poziomie 1-pętlowym

2.5 *Równania grupy renormalizacji, biegnące stałe sprzężenia

2.6 *1-pętlowa struktura elektrodynamiki kwantowej, biegnąca stała sprzężenia w QED

2.7 *Procesy rozpraszania w QED.

2.8 *Definicja obserwabli fizycznych, niezależność fizycznej masy i elementów macierzy S od skali renormalizacji

2.9 *Potencjał efektywny poprawiony przez równania grupy renormalizacji w bezmasowej teorii ϕ^4